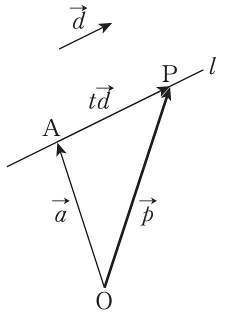
PART4 ベクトル方程式

要点① 直線と方向ベクトル



ここでは，位置ベクトルを用いて平面上の直線を表す。

点$\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線を l とする。

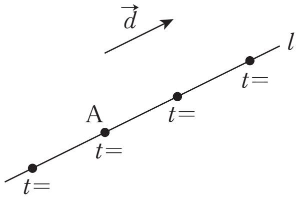
点$\mathrm{P}(\vec{p})$ が直線 l 上にあるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{d}$$

となる実数 t が存在する。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$ より

$$\vec{p}-\vec{a}=t\vec{d}$$

すなわち　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ …… ①



①において，実数 t の値を 1 つ定めると，それに応じて直線 l 上の点 P の位置が定まる。逆に，直線 l 上の点 P の位置を定めると，実数 t の値が 1 つに定まる。したがって，t がすべての実数値をとって変化すると，点 P は直線 l 上のすべての点を動き，その軌跡は直線 l となる。

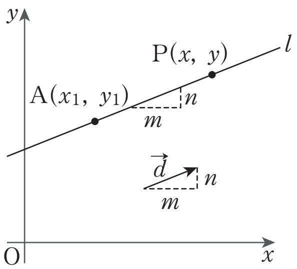
①を直線 l の「　　　　　　　　」といい，t を「媒介変数」という。また，$\vec{d}$ を直線 l の「　　　　　　」という。

直線のベクトル方程式

点$\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$$

要点② 直線の媒介変数表示



直線のベクトル方程式 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ …… ①を，ベクトルの成分を用いて表す。

点 O を原点とする座標平面において，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通り，$\vec{d}=(m,\ n)$ に平行な直線 l 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{p}=(x,\ y)$ より，①は

$$(x,\ y)=(x_1,\ y_1)+t(m,\ n)=(x_1+mt,\ y_1+nt)$$

であるから

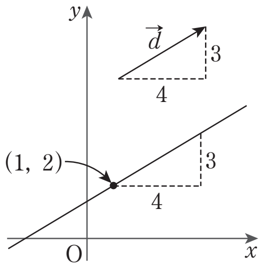
$$\begin{cases} x=x_1+mt \\ y=y_1+nt \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

と表される。この②を，直線 l の「　　　　　　」(またはパラメータ表示)という。

例　点 $(1,\ 2)$ を通り，$\vec{d}=(4,\ 3)$ を方向ベクトルとする直線の媒介変数表示は

$$(x,\ y)=(\ \ ,\ \ )+t(\ \ ,\ \ )=(1+4t,\ 2+3t)$$

よって $\begin{cases} x=1+4t \\ y=2+3t \end{cases}$



要点 ③　2 点を通る直線のベクトル方程式

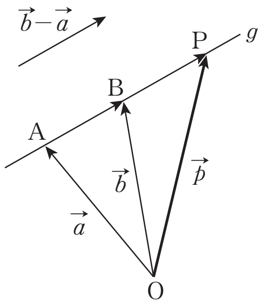
異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線 l は，点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$ を方向ベクトルとする直線であるから，直線 l のベクトル方程式は

$$\vec{p}=\quad+t$$

すなわち　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ ……③　と表される。

③において，$1-t=s$ とおくと，③は次のように表される。

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b},\quad s+t=1$$



2 点を通る直線のベクトル方程式

異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は

1　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$　　**2**　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

例　2 点 $\mathrm{A}(2,\ 8)$，$\mathrm{B}(7,\ 4)$ を通る直線の媒介変数表示は

$$(x,\ y)=\qquad(2,\ 8)+\ (7,\ 4)=(2+5t,\ 8-4t)$$

よって $\begin{cases} x=2+5t \\ y=8-4t \end{cases}$

4 次の条件を満たす直線の方程式を，媒介変数を t とする媒介変数表示で表せ。

(1) 点 A(2, −3) を通り，$\vec{d}=(-1,\ 5)$ に平行な直線

(2) 2 点 A(−1, 6)，B(2, 1) を通る直線

Point Pickup

直線のベクトル方程式

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$$

異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

直線の媒介変数表示は，直線上の点 P の座標を $(x,\ y)$ とおき，ベクトルを成分表示して求める。

第4講 PART4 確認問題

次の条件を満たす直線の方程式を，媒介変数を t とする媒介変数表示で表せ。

1 点 A$(-2,\ 5)$ を通り，$\vec{d}=(4,\ -7)$ に平行な直線

$$\begin{cases} x=\boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}}\,t \\ y=5-\boxed{\text{エ}}\,t \end{cases}$$

2 2点 A$(-2,\ 1)$，B$(2,\ -4)$ を通る直線

$$\begin{cases} x=-2+\boxed{\text{オ}}\,t \\ y=\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}\,t \end{cases}$$

PART4 ベクトル方程式

4 次の条件を満たす直線の方程式を，媒介変数を t とする媒介変数表示で表せ。

(1) 点 A(2, −3) を通り，$\vec{d}=(-1,\ 5)$ に平行な直線

(2) 2 点 A(−1, 6)，B(2, 1) を通る直線

[解答]

(1) $(x,\ y)=(2,\ -3)+t(-1,\ 5)=(2-t,\ -3+5t)$

よって $\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+5t \end{cases}$

(2) $(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 6)+t(2,\ 1)=(-1+t,\ 6-6t)+(2t,\ t)=(-1+3t,\ 6-5t)$

よって $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=6-5t \end{cases}$

第 4 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：4，エ：7

[解説]

点A$(-2,\ 5)$ を通り，$\vec{d}=(4,\ -7)$ に平行な直線の方程式は

$$(x,\ y)=(-2,\ 5)+t(4,\ -7) \quad \text{[A]}$$
$$=(-2+4t,\ 5-7t)$$

よって

$$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=5-7t \end{cases}$$

[A]　点 A$(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は
$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

2

[正解] オ：4，カ：1，キ：5

[解説]

2点 A$(-2,\ 1)$，B$(2,\ -4)$ を通る直線の方程式は

$$(x,\ y)=(1-t)(-2,\ 1)+t(2,\ -4) \quad \text{[B]}$$
$$=(-2+2t,\ 1-t)+(2t,\ -4t)$$
$$=(-2+4t,\ 1-5t)$$

よって

$$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=1-5t \end{cases}$$

[B]　異なる2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は
$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$